

*Unidad V*

1. Unidad Temática V.- Series de Fourier
2. Horas Prácticas 10
3. Horas Teóricas 5
4. Horas Totales 15
5. Objetivo

El alumno utilizará las series de Fourier en el modelado y análisis de problemas relacionados con el mantenimiento industrial, en particular en estudios de calidad de la energía y vibraciones, mediante la comprensión de los conceptos básicos.

## FOURIER

## Contenido

1. Funciones Periódicas
2. Serie trigonométrica de Fourier
3. Componente de directa, fundamental y armónicos
4. Ortogonalidad de las funciones seno y coseno
5. Cálculo de los coeficientes de la Serie de Fourier
6. Simetrías en señales periódicas
7. Fenómeno de Gibbs
8. Forma Compleja de las Series de Fourier
9. Espectros de frecuencia discreta
10. Potencia y Teorema de Parseval
11. De la serie a la Transformada de Fourier.
12. Obtención de la serie de Fourier usando FFT
13. Espectro de Frecuencia y medidores digitales

## Preámbulo

**El análisis de Fourier fue introducido en 1822 en la “Théorie analytique de la chaleur” para tratar la solución de problemas de valores en la frontera en la conducción del calor.**

**Más de siglo y medio después las aplicaciones de esta teoría son muy bastas: Sistemas Lineales, Comunicaciones, Física moderna, Electrónica, Óptica y por supuesto, Redes Eléctricas entre muchas otras.**

## Funciones Periódicas

Una **Función Periódica**  $f(t)$  cumple la siguiente propiedad para todo valor de  $t$ .

$$f(t) = f(t+T)$$

A la constante mínima para la cual se cumple lo anterior se le llama el **periodo** de la función

Repitiendo la propiedad se puede obtener:

$$f(t) = f(t+nT), \text{ donde } n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

## Funciones Periódicas

**Ejemplo:** ¿Cuál es el período de la función  $f(t) = \cos(\frac{t}{3}) + \cos(\frac{t}{4})$ ?

**Solución.**- Si  $f(t)$  es periódica se debe cumplir:

$$f(t+T) = \cos(\frac{t+T}{3}) + \cos(\frac{t+T}{4}) = f(t) = \cos(\frac{t}{3}) + \cos(\frac{t}{4})$$

Pero como se sabe  $\cos(x+2k\pi) = \cos(x)$  para cualquier entero  $k$ , entonces para que se cumpla la igualdad se requiere que

$$T/3 = 2k_1\pi, \quad T/4 = 2k_2\pi$$

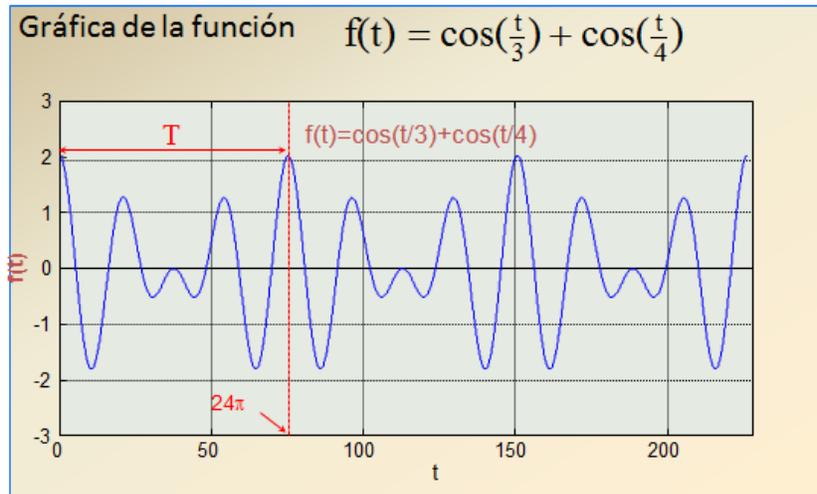
Es decir,

$$T = 6k_1\pi = 8k_2\pi$$

Donde  $k_1$  y  $k_2$  son enteros,

El valor mínimo de  $T$  se obtiene con  $k_1=4$ ,  $k_2=3$ , es decir,  $T=24\pi$

## Funciones Periódicas



## Funciones Periódicas

Podríamos pensar que cualquier suma de funciones seno y coseno produce una función periódica.

Esto no es así, por ejemplo, consideremos la función

$$f(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t).$$

Para que sea periódica se requiere encontrar dos enteros  $m, n$  tales que

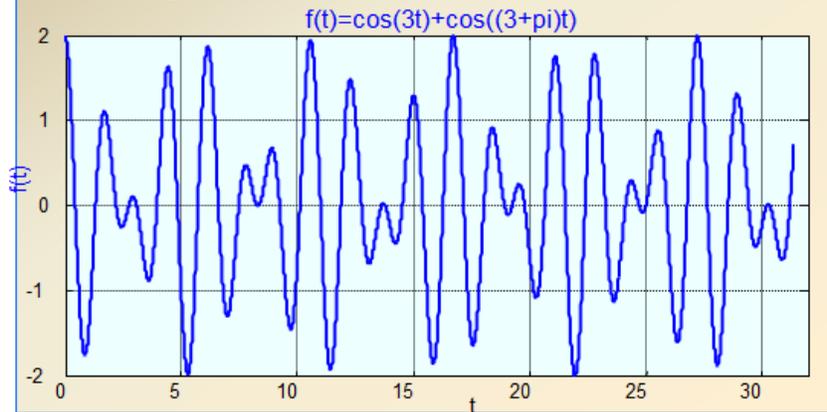
$$\omega_1 T = 2\pi m, \quad \omega_2 T = 2\pi n$$

De donde

Es decir, la relación  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n}$  debe ser un número racional.

## Funciones Periódicas

**Ejemplo:** la función  $\cos(3t)+\cos(\pi+3)t$  no es periódica, ya que  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3}{3+\pi}$  no es un número racional.



## Funciones Periódicas

**ACTIVIDAD 1:** Encontrar el periodo de las siguientes funciones, si es que son periódicas:

- 1)  $f(t) = \text{sen}(nt)$ , donde  $n$  es un entero.
- 2)  $f(t) = \text{sen}^2(2\pi t)$
- 3)  $f(t) = \text{sen}(t) + \text{sen}(t + \pi/2)$
- 4)  $f(t) = \text{sen}(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$
- 5)  $f(t) = \text{sen}(\sqrt{2} t)$

## Serie Trigonométrica de Fourier

Algunas funciones periódicas  $f(t)$  de periodo  $T$  pueden expresarse por la siguiente serie, llamada *Serie Trigonométrica de Fourier*

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) + \dots \\ + b_1 \sin(\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t) + \dots$$

Donde  $\omega_0 = 2\pi/T$ .

Es decir,

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

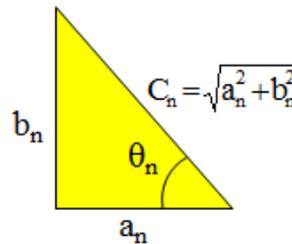
## Serie Trigonométrica de Fourier

Es posible escribir de una manera ligeramente diferente la Serie de Fourier, si observamos que el término  $a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$  se puede escribir como

$$\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left( \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos(n\omega_0 t) + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin(n\omega_0 t) \right)$$

Podemos encontrar una manera más compacta para expresar estos coeficientes pensando en un triángulo rectángulo:

## Serie Trigonométrica de Fourier



$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \cos \theta_n$$

$$\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \text{sen} \theta_n$$

Con lo cual la expresión queda

$$C_n [\cos \theta_n \cos(n\omega_0 t) + \text{sen} \theta_n \text{sen}(n\omega_0 t)]$$

$$= C_n [\cos(n\omega_0 t - \theta_n)]$$

## Serie Trigonométrica de Fourier

Si además definimos  $C_0 = a_0/2$ , la serie de Fourier se puede escribir como

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n [\cos(n\omega_0 t - \theta_n)]$$

Así,  $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

y  $\theta_n = \tan^{-1} \left( \frac{b_n}{a_n} \right)$

## Serie Trigonométrica de Fourier

### ACTIVIDAD 2:

Definir adecuadamente los coeficientes  $C_0$ ,  $C_n$  y  $\theta_n$ , de manera que la serie de Fourier se pueda escribir como

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n [\text{sen}(n\omega_0 t + \theta_n)]$$

## Componentes y armónicas

Así, una función periódica  $f(t)$  se puede escribir como la suma de **componentes sinusoidales** de diferentes frecuencias  $\omega_n = n\omega_0$ .

A la componente sinusoidal de frecuencia  $n\omega_0$ :  $C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$  se le llama la **enésima armónica** de  $f(t)$ .

A la primera armónica ( $n=1$ ) se le llama la **componente fundamental** y su periodo es el mismo que el de  $f(t)$

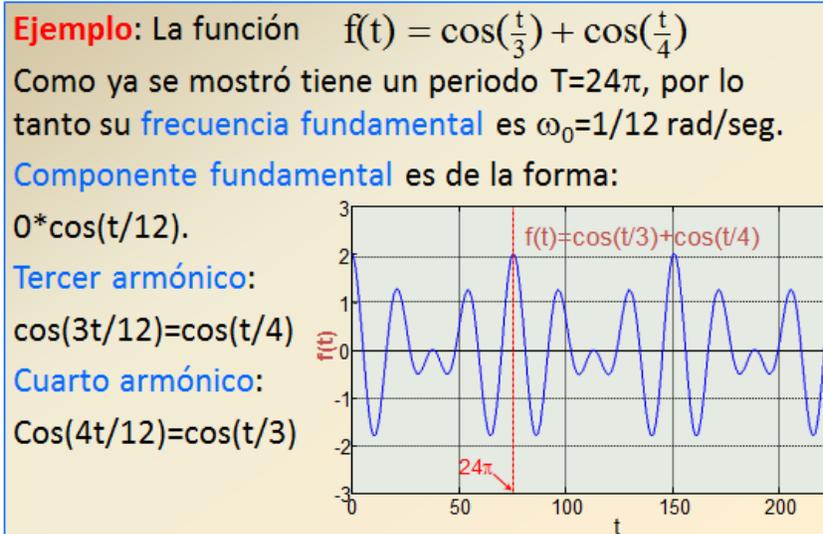
A la frecuencia  $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T$  se le llama **frecuencia angular fundamental**.

## Componentes y armónicas

A la componente de frecuencia cero  $C_0$ , se le llama **componente de corriente directa** (cd) y corresponde al valor promedio de  $f(t)$  en cada periodo.

Los coeficientes  $C_n$  y los ángulos  $\theta_n$  son respectivamente las **amplitudes** y los **ángulos de fase** de las armónicas.

## Componentes y armónicas

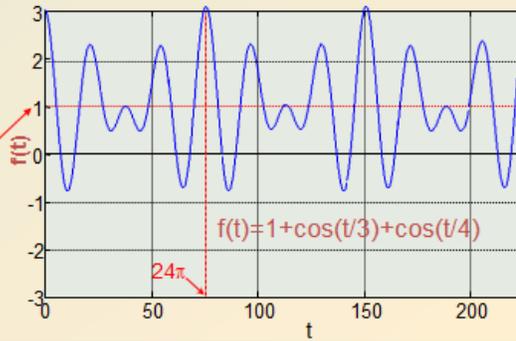


## Componentes y armónicas

**Ejemplo:** Como puede verse, la función anterior tiene tantas partes positivas como negativas, por lo tanto su componente de cd es cero, en cambio

$$f(t) = 1 + \cos\left(\frac{t}{3}\right) + \cos\left(\frac{t}{4}\right)$$

Tiene tantas partes arriba como abajo de 1 por lo tanto, su **componente de cd** es 1.



## Componentes y armónicas

### ACTIVIDAD 3

: ¿Cuál es la componente fundamental, las armónicas distintas de cero y la componente de directa de

- $f(t) = \sin^2 t$
- $f(t) = \cos^2 t$  ?

Justifícalo además mostrando la gráfica de las funciones y marcando en ellas el periodo fundamental y la componente de cd.

## Ortogonalidad de senos y cosenos

Se dice que un conjunto de funciones  $f_k(t)$  son **ortogonales** en el intervalo  $a < t < b$  si dos funciones cualesquiera  $f_m(t)$ ,  $f_n(t)$  de dicho conjunto cumplen

$$\int_a^b f_m(t)f_n(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ r_n & \text{para } m = n \end{cases}$$

## Ortogonalidad de senos y cosenos

**Ejemplo:** las funciones  $t$  y  $t^2$  son ortogonales en el intervalo  $-1 < t < 1$ , ya que

$$\int_{-1}^1 tt^2 dt = \int_{-1}^1 t^3 dt = \frac{t^4}{4} \Big|_{-1}^1 = 0$$

**Ejemplo:** Las funciones  $\sin t$  y  $\cos t$  son ortogonales en el intervalo  $-\pi/2 < t < \pi/2$ , ya que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sentcost} dt = \frac{\text{sen}^2 t}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

## Ortogonalidad de senos y cosenos

### ACTIVIDAD 4:

Dar un ejemplo de un par de funciones que sean ortogonales en el intervalo:

- a)  $0 < t < 1$
- b)  $0 < t < \pi$

## Ortogonalidad de senos y cosenos

Aunque los ejemplos anteriores se limitaron a un par de funciones, el siguiente es un conjunto de una infinidad de funciones ortogonales en el intervalo  $-T/2 < t < T/2$ .

$1, \cos\omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \cos 3\omega_0 t, \dots, \text{sen}\omega_0 t, \text{sen} 2\omega_0 t, \text{sen} 3\omega_0 t, \dots$   
(para cualquier valor de  $\omega_0 = 2\pi/T$ ).

Para verificar lo anterior podemos probar por pares:

1.-  $f(t)=1$  Vs.  $\cos(m\omega_0 t)$ :

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) dt = \frac{\text{sen}(m\omega_0 t)}{m\omega_0} \Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{2\text{sen}(m\omega_0 T/2)}{m\omega_0} = \frac{2\text{sen}(m\pi)}{m\omega_0} = 0$$

Ya que  $m$  es un entero.

## Ortogonalidad de senos y cosenos

2.-  $f(t)=1$  Vs.  $\text{sen}(m\omega_0 t)$ :

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} \text{sen}(m\omega_0 t) dt &= \frac{-\cos(m\omega_0 t)}{m\omega_0} \Big|_{-T/2}^{T/2} = \\ &= \frac{-1}{m\omega_0} [\cos(m\omega_0 T/2) - \cos(m\omega_0 T/2)] = 0 \end{aligned}$$

3.-  $\cos(m\omega_0 t)$  Vs.  $\cos(n\omega_0 t)$ :

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ T/2 & \text{para } m = n \neq 0 \end{cases}$$

## Ortogonalidad de senos y cosenos

4.-  $\text{sen}(m\omega_0 t)$  Vs.  $\text{sen}(n\omega_0 t)$ :

$$\int_{-T/2}^{T/2} \text{sen}(m\omega_0 t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ T/2 & \text{para } m = n \neq 0 \end{cases}$$

5.-  $\text{sen}(m\omega_0 t)$  Vs.  $\cos(n\omega_0 t)$ :

$$\int_{-T/2}^{T/2} \text{sen}(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = 0 \quad \text{para cualquier } m, n$$

## Ortogonalidad de senos y cosenos

Para calcular las integrales de los casos 3, 4 y 5, son útiles las siguientes identidades trigonométricas:

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}[-\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)]$$

Además:

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

## Cálculo de los coeficientes de la Serie

Dada una función periódica  $f(t)$  ¿cómo se obtiene su serie de Fourier?

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

Obviamente, el problema se resuelve si sabemos como calcular los coeficientes  $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$

Esto se puede resolver considerando la ortogonalidad de las funciones seno y coseno comentada anteriormente.

## Cálculo de los coeficientes de la Serie

Multiplicando ambos miembros por  $\cos(n\omega_0 t)$  e integrando de  $-T/2$  a  $T/2$ , obtenemos:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Similarmente, multiplicando por  $\sin(n\omega_0 t)$  e integrando de  $-T/2$  a  $T/2$ , obtenemos:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Similarmente, integrando de  $-T/2$  a  $T/2$ , obtenemos:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

## Cálculo de los coeficientes de la Serie

El intervalo de integración no necesita ser simétrico respecto al origen.

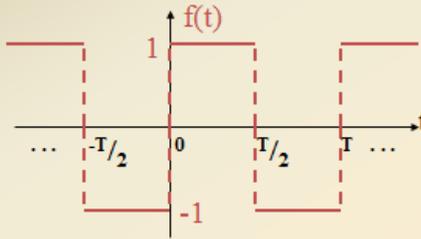
Como la ortogonalidad de las funciones seno y coseno no sólo se da en el intervalo de  $-T/2$  a  $T/2$ , sino en cualquier intervalo que cubra un periodo completo:

(de  $t_0$  a  $t_0+T$ , con  $t_0$  arbitrario)

las fórmulas anteriores pueden calcularse en cualquier intervalo que cumpla este requisito.

## Cálculo de los coeficientes de la Serie

**Ejemplo:** Encontrar la Serie de Fourier para la siguiente función de periodo T:



**Solución:** La expresión para  $f(t)$  en  $-T/2 < t < T/2$  es

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{para } -\frac{T}{2} < t < 0 \\ 1 & \text{para } 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

## Cálculo de los coeficientes de la Serie

**Coefficientes  $a_n$ :**  $a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$

$$= \frac{2}{T} \left[ \int_{-T/2}^0 -\cos(n\omega_0 t) dt + \int_0^{T/2} \cos(n\omega_0 t) dt \right]$$

$$= \frac{2}{T} \left[ -\frac{1}{n\omega_0} \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \Big|_{-T/2}^0 + \frac{1}{n\omega_0} \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \Big|_0^{T/2} \right]$$

$$= 0 \quad \text{para } n \neq 0$$

## Cálculo de los coeficientes de la Serie

**Coeficiente  $a_0$ :**

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

$$= \frac{2}{T} \left[ \int_{-T/2}^0 - dt + \int_0^{T/2} dt \right]$$

$$= \frac{2}{T} \left[ -t \Big|_{-T/2}^0 + t \Big|_0^{T/2} \right]$$

$$= 0$$

## Cálculo de los coeficientes de la Serie

**Coeficientes  $b_n$ :**

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt$$

$$= \frac{2}{T} \left[ \int_{-T/2}^0 - \text{sen}(n\omega_0 t) dt + \int_0^{T/2} \text{sen}(n\omega_0 t) dt \right]$$

$$= \frac{2}{T} \left[ \frac{1}{n\omega_0} \cos(n\omega_0 t) \Big|_{-T/2}^0 - \frac{1}{n\omega_0} \cos(n\omega_0 t) \Big|_0^{T/2} \right]$$

$$= \frac{1}{n\pi} [(1 - \cos(n\pi)) - (\cos(n\pi) - 1)]$$

$$= \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n] \quad \text{para } n \neq 0$$

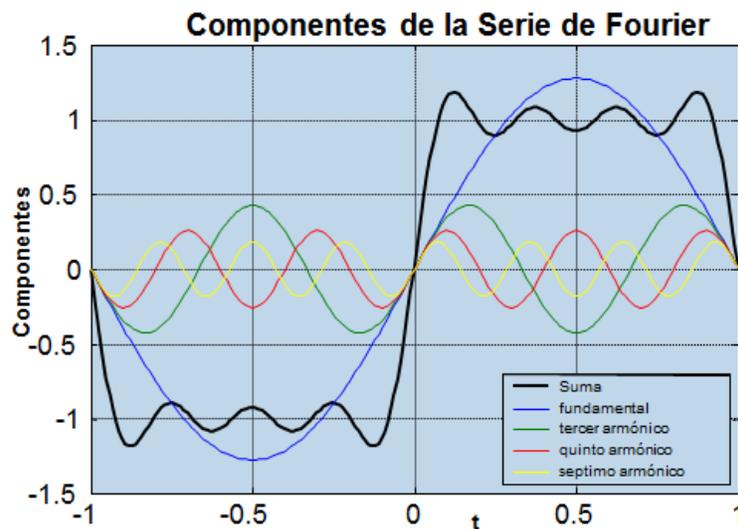
## Cálculo de los coeficientes de la Serie

**Serie de Fourier:** Finalmente la Serie de Fourier queda como

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left[ \text{sen}(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \text{sen}(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \text{sen}(5\omega_0 t) + \dots \right]$$

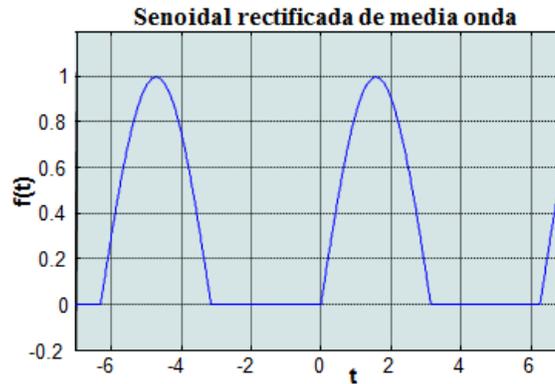
En la siguiente figura se muestran: la componente fundamental y los armónicos 3, 5 y 7 así como la suma parcial de estos primeros cuatro términos de la serie para  $\omega_0 = \pi$ , es decir,  $T=2$ :

## Cálculo de los coeficientes de la Serie



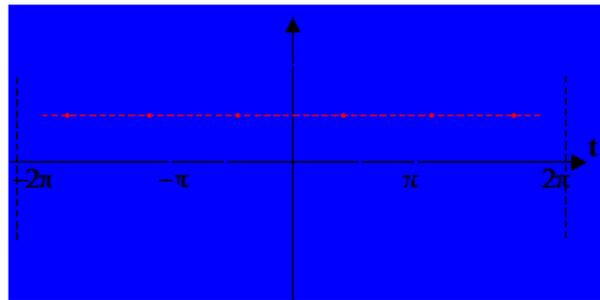
## Cálculo de los coeficientes de la Serie

**ACTIVIDAD 5:** Encontrar la serie de Fourier para la siguiente señal senoidal rectificada de media onda de periodo  $2\pi$ .



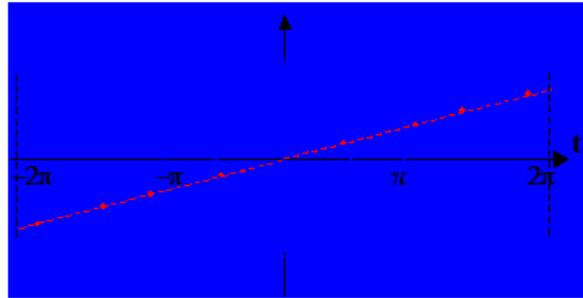
## Funciones Pares e Impares

Una función (periódica o no) se dice **función par** (o con simetría par) si su gráfica es simétrica respecto al eje vertical, es decir, la función  $f(t)$  es par si

$$f(t) = f(-t)$$


## Funciones Pares e Impares

En forma similar, una función  $f(t)$  se dice **función impar** o con simetría impar, si su gráfica es simétrica respecto al origen, es decir, si cumple lo siguiente:  $-f(t) = f(-t)$



## Funciones Pares e Impares

**Ejemplo:** ¿Las siguientes funciones son pares o impares?

$$f(t) = t + 1/t$$

$$g(t) = 1/(t^2 + 1),$$

Solución:

Como  $f(-t) = -t - 1/t = -f(t)$ , por lo tanto  $f(t)$  es función impar.

Como  $g(-t) = 1/((-t)^2 + 1) = 1/(t^2 + 1) = g(t)$ , por lo tanto  $g(t)$  es función par.

## Funciones Pares e Impares

**Ejemplo:** ¿La función  $h(t)=f(1+t^2)$  es par o impar?, donde  $f$  es una función arbitraria.

Solución:

Sea  $g(t)=1+t^2$ , Entonces  $h(t)=f(g(t))$

Por lo tanto  $h(-t) = f(g(-t))$ ,

Pero  $g(-t)=1+(-t)^2 = 1+t^2=g(t)$ ,

finalmente  $h(-t)=f(g(t))=h(t)$ , por lo tanto  $h(t)$  es función par, sin importar como sea  $f(t)$ .

## Funciones Pares e Impares

**Ejemplo:** De acuerdo al ejemplo anterior, todas las siguientes funciones son pares:

$$h(t) = \sin(1+t^2)$$

$$h(t) = \exp(1+t^2)+5/(1+t^2)$$

$$h(t) = \cos(2+t^2)+1$$

$$h(t) = (10+t^2)-(1+t^2)1/2$$

etc...

Ya que todas tienen la forma  $f(1+t^2)$

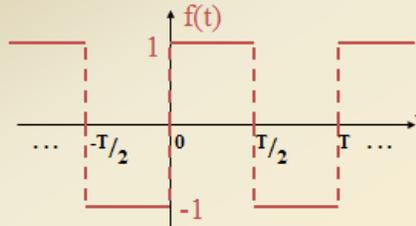
## Funciones Pares e Impares

Como la función  $\text{sen}(n\omega_0 t)$  es una función **impar** para todo  $n \neq 0$  y la función  $\text{cos}(n\omega_0 t)$  es una función **par** para todo  $n$ , es de esperar que:

- Si  $f(t)$  es par, su serie de Fourier no contendrá términos seno, por lo tanto  $b_n = 0$  para todo  $n$
- Si  $f(t)$  es impar, su serie de Fourier no contendrá términos coseno, por lo tanto  $a_n = 0$  para todo  $n$

## Funciones Pares e Impares

Por **ejemplo**, la señal cuadrada, ya analizada en un ejemplo previo:



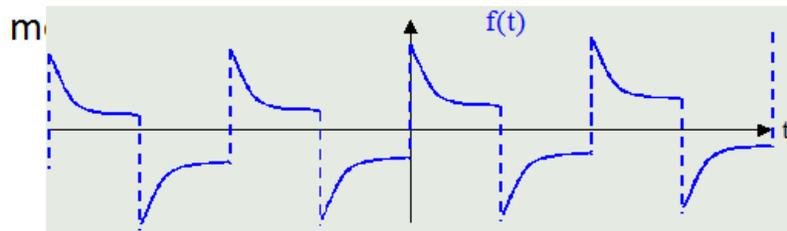
Es una función impar, por ello su serie de Fourier no contiene términos coseno:

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left[ \text{sen}(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \text{sen}(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \text{sen}(5\omega_0 t) + \dots \right]$$

## Simetría de Media Onda

Una función periódica de periodo  $T$  se dice **simétrica de media onda**, si cumple la propiedad  $f(t + \frac{1}{2}T) = -f(t)$

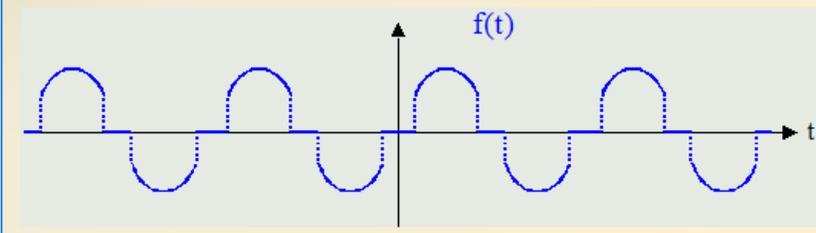
Es decir, si en su gráfica las partes negativas son un reflejo de las positivas pero desplazadas



## Simetría de Cuarto de Onda

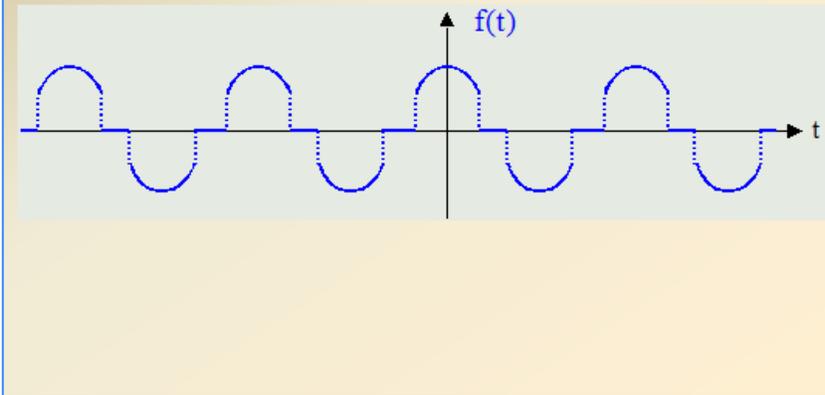
Si una función tiene simetría de media onda y además es función par o impar, se dice que tiene simetría de cuarto de onda par o impar

**Ejemplo:** Función con simetría impar de cuarto de onda:



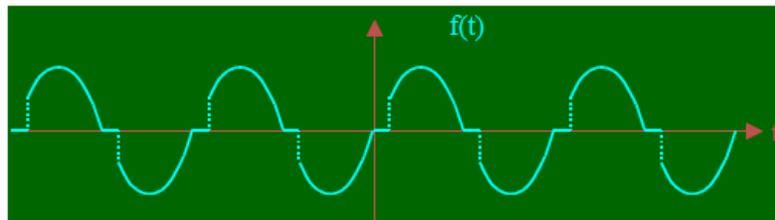
## Simetría de Cuarto de Onda

**Ejemplo:** Función con simetría par de cuarto de onda:



## Simetría de Cuarto de Onda

**ACTIVIDAD 6:** ¿Qué tipo de simetría tiene la siguiente señal de voltaje producida por un triac controlado por fase?



### Simetrías y Coeficientes de Fourier

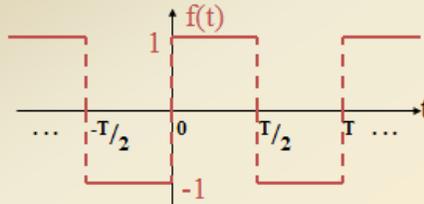
Simetría	Coeficientes		Funciones en la serie
Ninguna	$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$	$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sen(n\omega_0 t) dt$	Senos y cosenos
Par	$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$	$b_n=0$	únicamente cosenos
Impar	$a_n=0$	$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sen(n\omega_0 t) dt$	únicamente senos
media onda	$a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt & n \text{ impar} \end{cases}$	$b_n = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sen(n\omega_0 t) dt & n \text{ impar} \end{cases}$	Senos y cosenos impares

### Simetrías y Coeficientes de Fourier

Simetría	Coeficientes		Funciones en la serie
Ninguna	$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$	$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sen(n\omega_0 t) dt$	Senos y cosenos
¼ de onda par	$a_n = 0$ (n par) $a_n = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$ (n impar)	$b_n=0$	Sólo cosenos impares
¼ de onda impar	$a_n=0$	$b_n=0$ (n par) $b_n = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \sen(n\omega_0 t) dt$ (n impar)	Sólo senos impares

## Simetrías y Coeficientes de Fourier

Por **ejemplo**, la señal cuadrada, ya analizada en un ejemplo previo:



Es una función con simetría de  $\frac{1}{4}$  de onda impar, por ello su serie de Fourier sólo contiene términos seno de frecuencia impar:

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left[ \text{sen}(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \text{sen}(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \text{sen}(5\omega_0 t) + \dots \right]$$

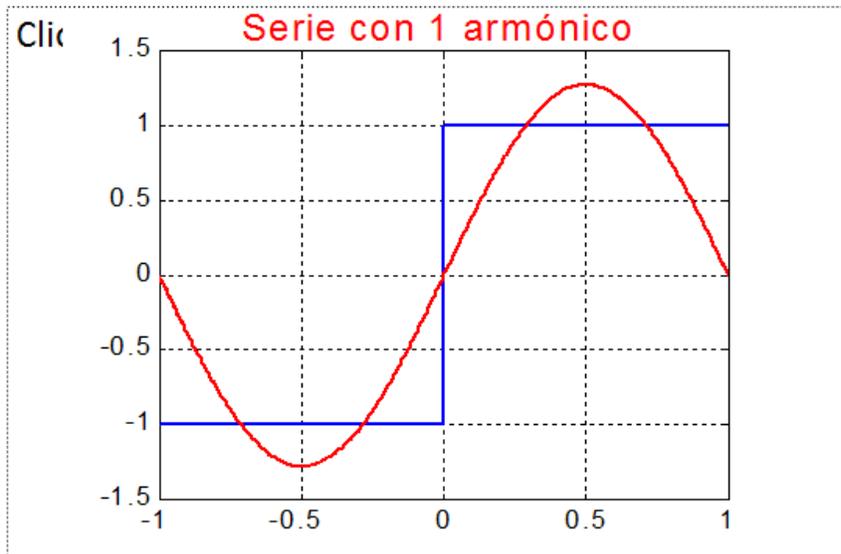
## Fenómeno de Gibbs

Si la serie de Fourier para una función  $f(t)$  se trunca para lograr una *aproximación en suma finita de senos y cosenos*, es natural pensar que a medida que agreguemos más armónicos, la sumatoria se aproximará más a  $f(t)$ .

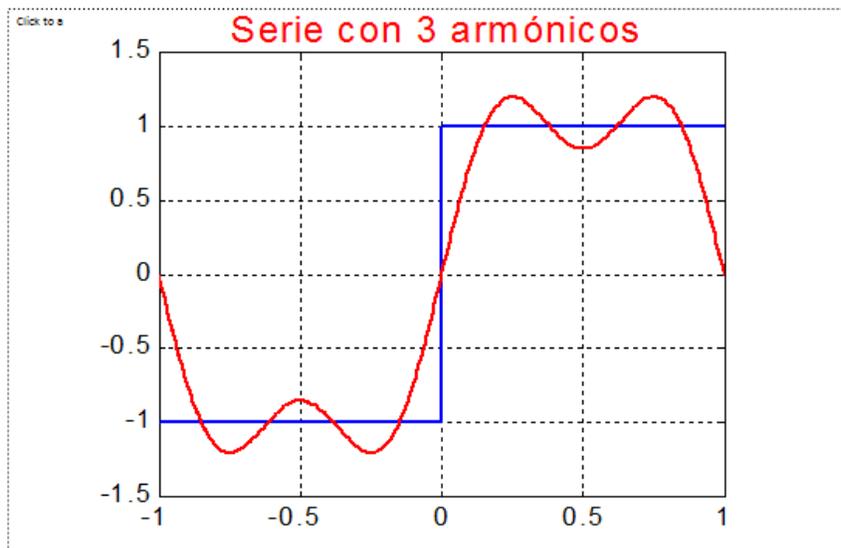
Esto se cumple excepto en las discontinuidades de  $f(t)$ , en donde el error de la suma finita no tiende a cero a medida que agregamos armónicos.

Por ejemplo, consideremos el tren de pulsos anterior:

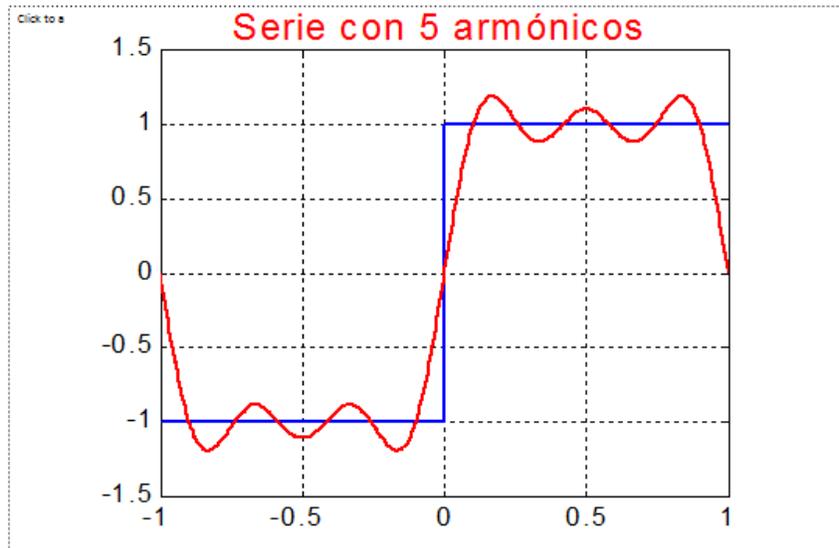
## Fenómeno de Gibbs



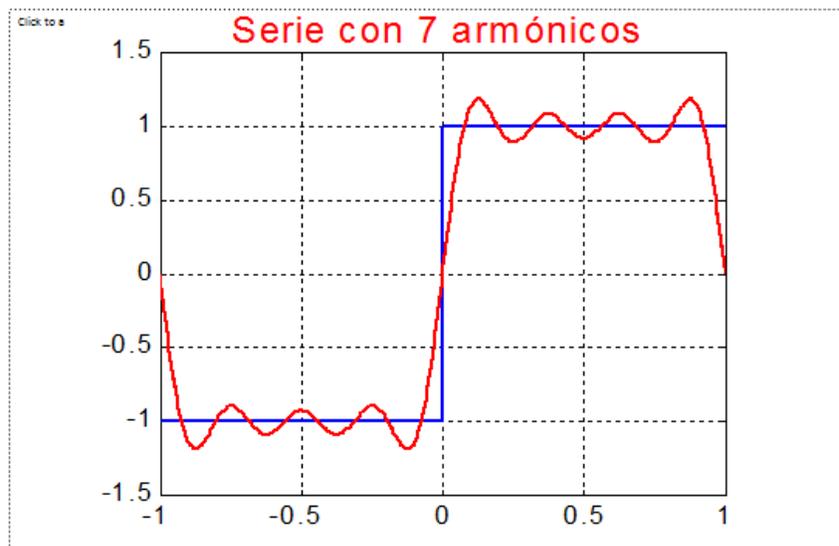
## Fenómeno de Gibbs



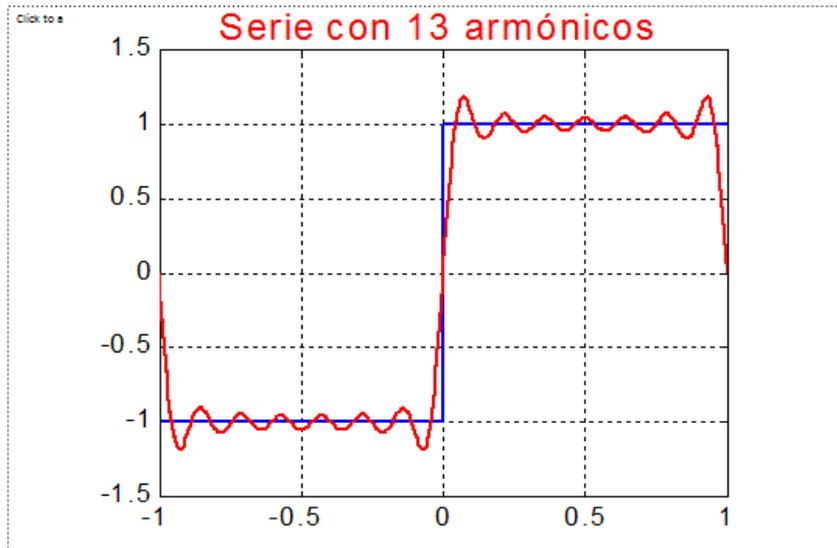
## Fenómeno de Gibbs



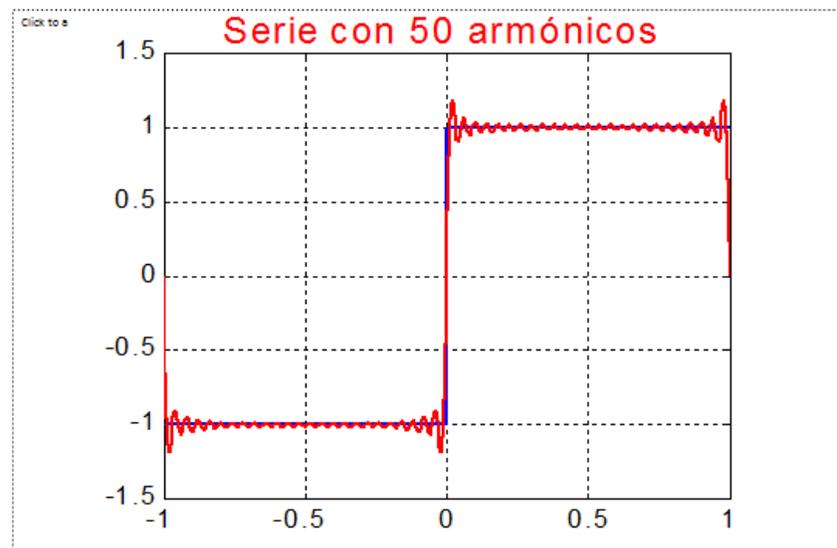
## Fenómeno de Gibbs



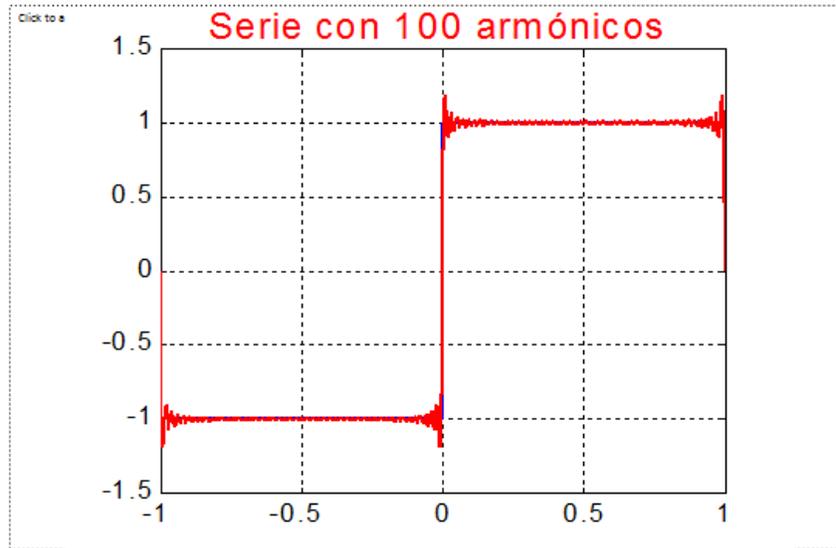
## Fenómeno de Gibbs



## Fenómeno de Gibbs



## Fenómeno de Gibbs



## Forma Compleja de la Serie de Fourier

Consideremos la serie de Fourier para una función periódica  $f(t)$ , con periodo  $T=2\pi/\omega_0$ .

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \text{sen}(n\omega_0 t)]$$

Es posible obtener una forma alternativa usando las fórmulas de Euler:

$$\cos(n\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t})$$

$$\text{sen}(n\omega_0 t) = \frac{1}{2j}(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t})$$

Donde  $j = \sqrt{-1}$

## Forma Compleja de la Serie de Fourier

Sustituyendo

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \frac{1}{2} (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) + b_n \frac{1}{2j} (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) \right]$$

Y usando el hecho de que  $1/j = -j$

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} (a_n - jb_n) e^{jn\omega_0 t} + \frac{1}{2} (a_n + jb_n) e^{-jn\omega_0 t} \right]$$

Y definiendo:

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad c_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + jb_n)$$

Lo cual es congruente con la fórmula para  $b_n$ , ya que  $b_{-n} = -b_n$ , ya que la función seno es impar.

## Forma Compleja de la Serie de Fourier

La serie se puede escribir como

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{jn\omega_0 t} + c_{-n} e^{-jn\omega_0 t})$$

O bien,

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Es decir,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

## Forma Compleja de la Serie de Fourier

A la expresión obtenida

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Se le llama **forma compleja de la serie de Fourier** y sus coeficientes  $c_n$  pueden obtenerse a partir de los coeficientes  $a_n$ ,  $b_n$  como ya se dijo, o bien:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Para  $n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

## Forma Compleja de la Serie de Fourier

Los coeficientes  $c_n$  son números complejos, y también se pueden escribir en forma polar:

$$c_n = |c_n| e^{j\phi_n}$$

Obviamente,  $c_{-n} = c_n^* = |c_n| e^{-j\phi_n}$

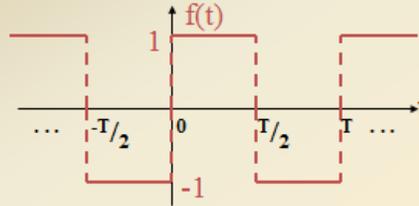
Donde  $|c_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ ,  $\phi_n = \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$

Para todo  $n \neq 0$ ,

Para  $n=0$ ,  $c_0$  es un número real:  $c_0 = \frac{1}{2} a_0$

## Forma Compleja de la Serie de Fourier

**Ejemplo.** Encontrar la forma compleja de la serie de Fourier para la función ya tratada:



**Solución 1.** Como ya se calcularon los coeficientes de la forma trigonométrica ( $a_n$  y  $b_n$ ):

$a_n = 0$  para todo  $n$

y  $b_n = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n]$  para todo  $n$

## Forma Compleja de la Serie de Fourier

Podemos calcular los coeficientes  $c_n$  de:

$$c_n = \frac{1}{2} [a_n - j b_n] = -j \frac{1}{2} \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

$$c_n = -j \frac{1}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

Entonces la Serie Compleja de Fourier queda

$$f(t) = \frac{2}{\pi} j \left( \dots + \frac{1}{5} e^{-j5\omega_0 t} + \frac{1}{3} e^{-j3\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t} \right. \\ \left. - e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{3} e^{j3\omega_0 t} - \frac{1}{5} e^{j5\omega_0 t} - \dots \right)$$

## Forma Compleja de la Serie de Fourier

**Solución 2.** También podemos calcular los coeficientes  $c_n$  mediante la integral

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \left( \int_0^{T/2} e^{-jn\omega_0 t} dt + \int_{T/2}^T -e^{-jn\omega_0 t} dt \right) \\ &= \frac{1}{T} \left( \left. \frac{1}{-jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 t} \right|_0^{T/2} - \left. \frac{1}{-jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 t} \right|_{T/2}^T \right) \\ &= \frac{1}{-jn\omega_0 T} [(e^{-jn\omega_0 T/2} - 1) - (e^{-jn\omega_0 T} - e^{-jn\omega_0 T/2})] \end{aligned}$$

## Forma Compleja de la Serie de Fourier

Como  $\omega_0 T = 2\pi$  y además  $e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \sin \theta$

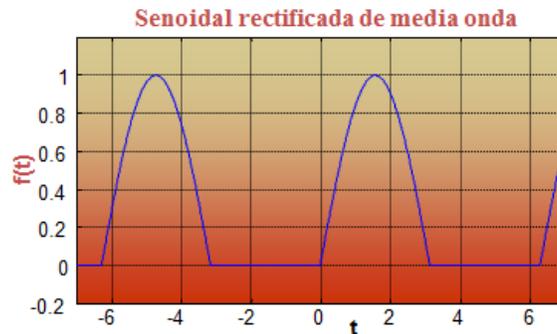
$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{-jn\omega_0 T} [(-1)^n - 1] - \frac{1}{-jn\omega_0 T} [1 - (-1)^n] \\ &= -j \frac{2}{n\omega_0 T} [1 - (-1)^n] \\ &= -j \frac{1}{n\pi} [1 - (-1)^n] \end{aligned}$$

Lo cual coincide con el resultado ya obtenido.

## Forma Compleja de la Serie de Fourier

**ACTIVIDAD 7:** Calcular los coeficientes  $c_n$  para la siguiente función de periodo  $2\pi$ .

- A partir de los coeficientes  $a_n, b_n$
- Directamente de la integral



## Espectros de Frecuencia Discreta

A la gráfica de la magnitud de los coeficientes  $c_n$  contra la frecuencia angular  $\omega$  de la componente correspondiente se le llama el **espectro de amplitud** de  $f(t)$ .

A la gráfica del ángulo de fase  $\phi_n$  de los coeficientes  $c_n$  contra  $\omega$ , se le llama el **espectro de fase** de  $f(t)$ .

Como  $n$  sólo toma valores enteros, la frecuencia angular  $\omega = n\omega_0$  es una variable discreta y los espectros mencionados son *gráficas discretas*.

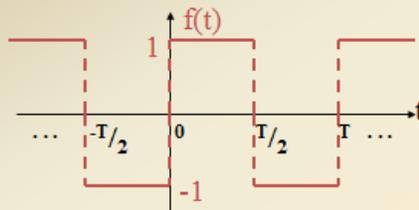
## Espectros de Frecuencia Discreta

Dada una función periódica  $f(t)$ , le corresponde una y sólo una serie de Fourier, es decir, le corresponde un conjunto único de coeficientes  $c_n$ .

Por ello, los coeficientes  $c_n$  especifican a  $f(t)$  en el **dominio de la frecuencia** de la misma manera que  $f(t)$  especifica la función en el **dominio del tiempo**.

## Espectros de Frecuencia Discreta

**Ejemplo.** Para la función ya analizada:

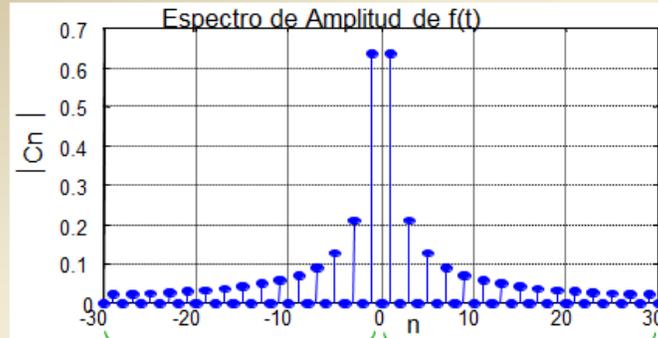


Se encontró que  $c_n = -j \frac{1}{n\pi} [1 - (-1)^n]$

Por lo tanto,  $|c_n| = \frac{1}{|n|\pi} [1 - (-1)^n]$

## Espectros de Frecuencia Discreta

El espectro de amplitud se muestra a continuación



Frecuencia negativa (?)

Frecuencia

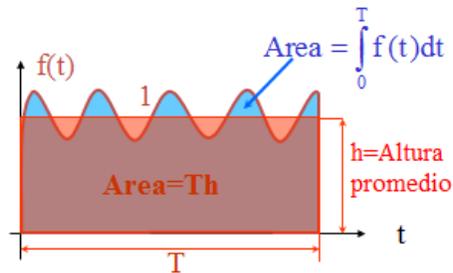
**Observación:** El eje horizontal es un eje de frecuencia, ( $n$ =número de armónico = múltiplo de  $\omega_0$ ).

## Espectros de Frecuencia Discreta

**ACTIVIDAD 8.** Dibujar el espectro de amplitud para la función senoidal rectificada de  $\frac{1}{2}$  onda.

## Potencia y Teorema de Parseval

El **promedio** o **valor medio** de una señal cualquiera  $f(t)$  en un periodo dado ( $T$ ) se puede calcular como la altura de un rectángulo que tenga la misma área que el área bajo la curva de  $f(t)$



## Potencia y Teorema de Parseval

De acuerdo a lo anterior, si la función periódica  $f(t)$  representa una señal de voltaje o corriente, la **potencia promedio** entregada a una carga resistiva de 1 ohm en un periodo está dada por

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt$$

Si  $f(t)$  es periódica, también lo será  $[f(t)]^2$  y el promedio en un periodo será el promedio en cualquier otro periodo.

## Potencia y Teorema de Parseval

El teorema de Parseval nos permite calcular la integral de  $[f(t)]^2$  mediante los coeficientes complejos  $c_n$  de Fourier de la función periódica  $f(t)$ :

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

O bien, en términos de los coeficientes  $a_n$ ,  $b_n$ :

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

## Potencia y Teorema de Parseval

Una consecuencia importante del teorema de Parseval es el siguiente resultado:

El valor cuadrático medio de una función periódica  $f(t)$  es igual a la suma de los valores cuadráticos medios de sus armónicos, es decir,

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = C_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{C_n}{\sqrt{2}} \right|^2$$

Donde  $C_n$  es la amplitud del armónico  $n$ -ésimo y  $C_0$  es la componente de directa.

## Potencia y Teorema de Parseval

Para aclarar el resultado anterior es conveniente encontrar la relación entre los coeficientes complejos  $c_n$  de la serie

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Y los coeficientes reales  $C_n$  de la serie

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n [\cos(n\omega_0 t - \theta_n)]$$

Donde  $C_n$  es la amplitud del armónico  $n$ -ésimo y  $C_0$  es la componente de directa.

## Potencia y Teorema de Parseval

Por un lado  $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ ,

Mientras que  $|c_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

Entonces,  $|c_n| = \frac{1}{2} C_n$  Por lo tanto,  $|c_n|^2 = \frac{1}{4} C_n^2$

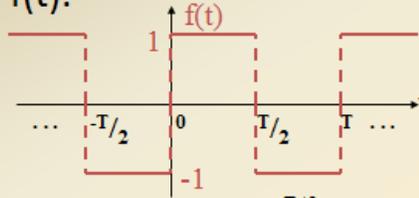
Además, para el armónico  $f_n(t) = C_n [\cos(n\omega_0 t - \theta_n)]$

Su valor rms es  $C_n / \sqrt{2}$ , por lo tanto su valor cuadrático medio es  $C_n^2 / 2$

Para la componente de directa  $C_0$ , su valor rms es  $|C_0|$ , por lo tanto su valor cuadrático medio será  $|C_0|^2$ .

## Potencia y Teorema de Parseval

**Ejemplo.** Calcular el valor cuadrático medio de la función  $f(t)$ :



**Solución.**

Del teorema de Parseval  $\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$

y del ejemplo anterior  $|c_n| = \frac{1}{|n|\pi} [1 - (-1)^n]$

sustituyendo  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{8}{\pi^2} \left[ 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots \right]$

## Potencia y Teorema de Parseval

La serie numérica obtenida converge a

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots = 1.2337$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{8}{\pi^2} (1.2337) = 1$$

Como era de esperarse.

## Potencia y Teorema de Parseval

### ACTIVIDAD 9.

Calcular el valor cuadrático medio para la señal senoidal rectificada de media onda de periodo  $2\pi$ .

### De la Serie a la Transformada de Fourier

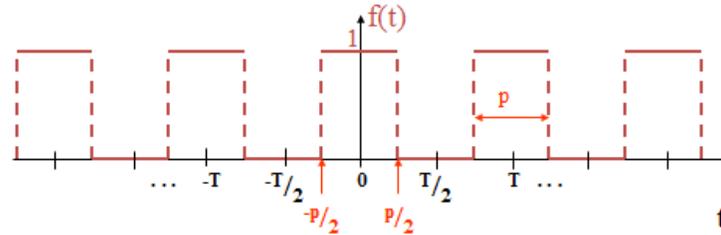
La serie de Fourier nos permite obtener una representación en el dominio de la frecuencia para *funciones periódicas*  $f(t)$ .

¿Es posible extender de alguna manera las series de Fourier para obtener el dominio de la frecuencia de *funciones no periódicas*?

Consideremos la siguiente función periodica de periodo T

## De la Serie a la Transformada de Fourier

Tren de pulsos de amplitud 1, ancho  $p$  y periodo  $T$ :



$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\frac{T}{2} < t < -\frac{p}{2} \\ 1 & -\frac{p}{2} < t < \frac{p}{2} \\ 0 & \frac{p}{2} < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

## De la Serie a la Transformada de Fourier

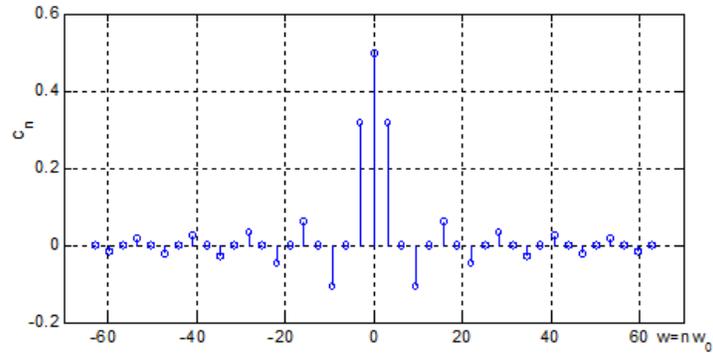
Los coeficientes de la Serie Compleja de Fourier en este caso resultan puramente reales:

$$c_n = \left(\frac{p}{T}\right) \frac{\text{sen}(n\omega_0 \frac{p}{2})}{(n\omega_0 \frac{p}{2})}$$

El espectro de frecuencia correspondiente lo obtenemos (en este caso) graficando  $c_n$  contra  $\omega = n\omega_0$ .

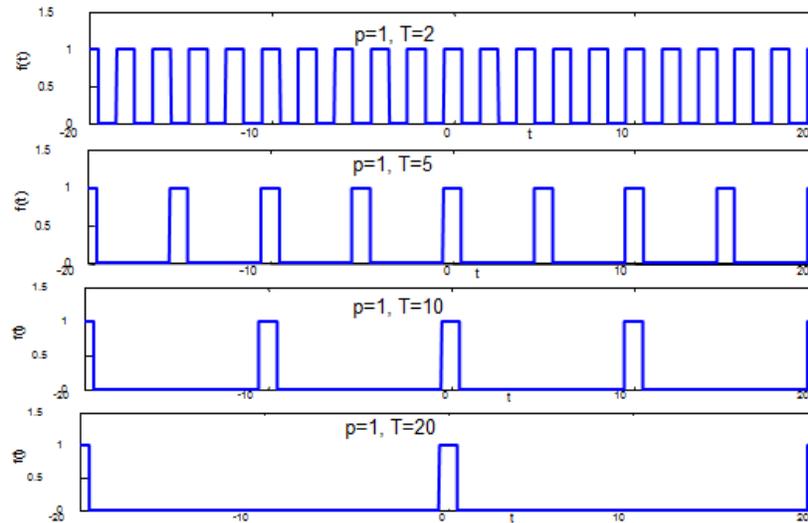
## De la Serie a la Transformada de Fourier

Espectro del tren de pulsos para  $p=1, T=2$



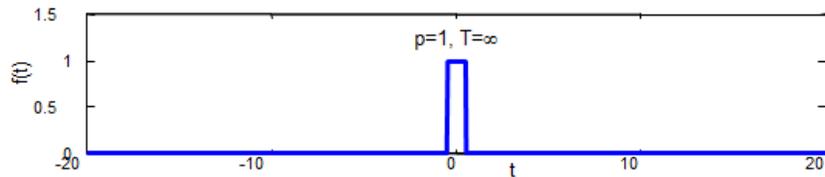
## De la Serie a la Transformada de Fourier

Si el periodo del tren de pulsos aumenta:



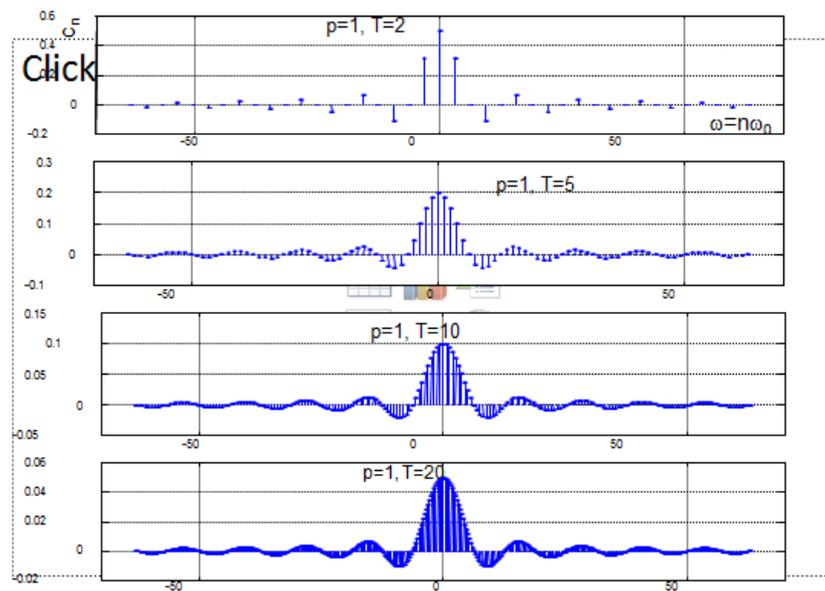
## De la Serie a la Transformada de Fourier

En el límite cuando  $T \rightarrow \infty$ , la función deja de ser periódica:



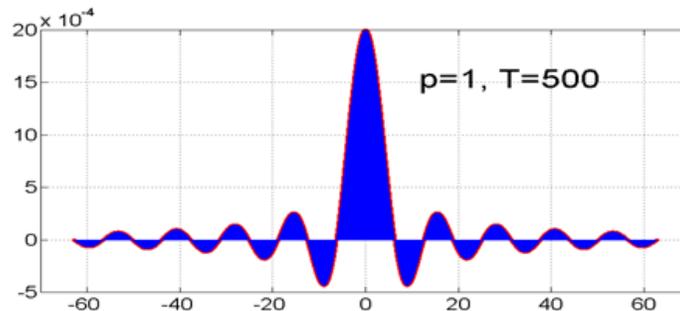
¿Qué pasa con los coeficientes de la serie de Fourier?

## De la Serie a la Transformada de Fourier



## De la Serie a la Transformada de Fourier

Si hace  $T$  muy grande ( $T \rightarrow \infty$ ): El espectro se vuelve ¡**continuo**!



## De la Serie a la Transformada de Fourier

El razonamiento anterior nos lleva a reconsiderar la expresión de una función  $f(t)$  **no periódica** en el dominio de la frecuencia, **no** como una suma de armónicos de frecuencia  $n\omega_0$ , sino como una función continua de la frecuencia  $\omega$ .

Así, la serie

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Al cambiar la variable discreta  $n\omega_0$  (cuando  $T \rightarrow \infty$ ) por la variable continua  $\omega$ , se transforma en una **integral** de la siguiente manera:

## De la Serie a la Transformada de Fourier

Como  $c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t} dt$

La serie queda  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t} dt \right] e^{jn\omega_0 t}$

O bien,  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t} dt \right] \omega_0 e^{jn\omega_0 t}$

cuando  $T \rightarrow \infty$ ,  $n\omega_0 \rightarrow \omega$  y  $\omega_0 \rightarrow d\omega$  y la sumatoria se convierte en

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} d\omega$$

## De la Serie a la Transformada de Fourier

Es decir,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad \leftarrow \text{Identidad de Fourier}$$

Donde

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad \leftarrow \text{Transformada De Fourier}$$

Estas expresiones nos permiten calcular la expresión  $F(\omega)$  (dominio de la frecuencia) a partir de  $f(t)$  (dominio del tiempo) y viceversa

## De la Serie a la Transformada de Fourier

**Notación:** A la función  $F(\omega)$  se le llama **transformada de Fourier de  $f(t)$**  y se denota por  $\mathcal{F}$ , es decir

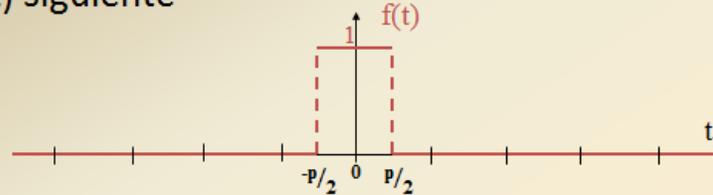
$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

En forma similar, a la expresión que nos permite obtener  $f(t)$  a partir de  $F(\omega)$  se le llama **transformada inversa de Fourier** y se denota por  $\mathcal{F}^{-1}$ , es decir

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

## De la Serie a la Transformada de Fourier

**Ejemplo.** Calcular  $F(\omega)$  para el pulso rectangular  $f(t)$  siguiente



**Solución.** La expresión en el dominio del tiempo de la función es

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < -\frac{p}{2} \\ 1 & -\frac{p}{2} < t < \frac{p}{2} \\ 0 & \frac{p}{2} < t \end{cases}$$

## De la Serie a la Transformada de Fourier

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-p/2}^{p/2} e^{-j\omega t} dt$$

Integrando

$$= \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-p/2}^{p/2}$$

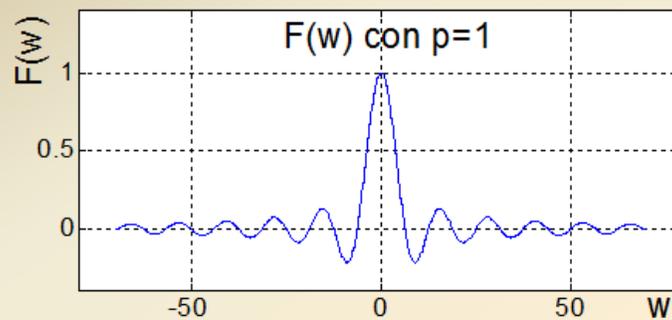
$$= \frac{1}{-j\omega} (e^{-j\omega p/2} - e^{j\omega p/2})$$

Usando la fórmula de Euler  $F(\omega) = p \frac{\text{sen}(\omega p / 2)}{\omega p / 2}$

Obsérvese que el resultado es igual al obtenido para  $c_n$  cuando  $T \rightarrow \infty$ , pero multiplicado por  $T$ .

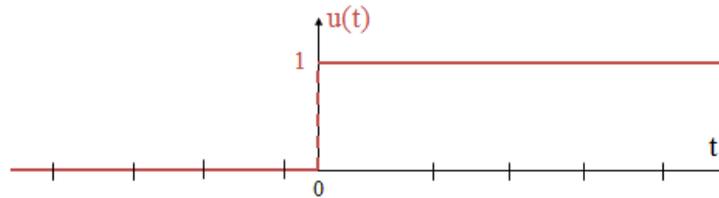
## De la Serie a la Transformada de Fourier

En forma Gráfica



## De la Serie a la Transformada de Fourier

**ACTIVIDAD 10.** Calcular la Transformada de Fourier de la función escalón unitario  $u(t)$ :



Graficar  $U(\omega) = \mathcal{F}[u(t)]$

¿Qué rango de frecuencias contiene  $U(\omega)$ ?

¿Cuál es la frecuencia predominante?

## La Transformada Rápida de Fourier

Cuando la función  $f(t)$  está dada por una lista de  $N$  valores  $f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_N)$  se dice que está **discretizada o muestreada**, entonces la integral que define la Transformada de Fourier:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Se convierte en la sumatoria

$$F(n) = \sum_{k=1}^N f(t_k) e^{-j \frac{2\pi}{N} (k-1)}, \quad \text{para } 1 \leq n \leq N$$

(Donde  $k$  es la frecuencia discreta)

Llamada **Transformada Discreta de Fourier**

## La Transformada Rápida de Fourier

La Transformada Discreta de Fourier (DFT) requiere el cálculo de  $N$  funciones exponenciales para obtener  $F(n)$ , lo cual resulta un esfuerzo de cálculo enorme para  $N$  grande.

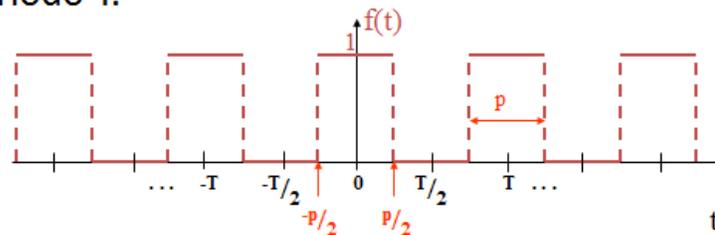
Se han desarrollado métodos que permiten ahorrar cálculos y evaluar de manera rápida la Transformada discreta, a estos métodos se les llama

### *Transformada Rápida de Fourier* (FFT)

## La FFT y la Serie de Fourier

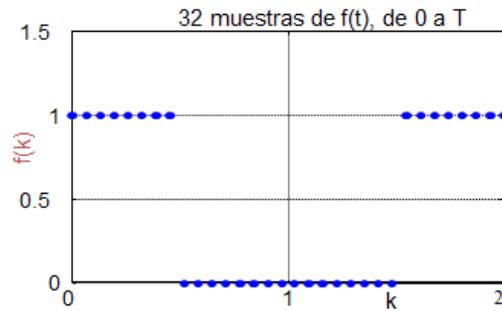
Podemos hacer uso de la FFT para calcular los coeficientes  $c_n$  y  $c_{-n}$  de la Serie compleja de Fourier como sigue:

**Ejemplo:** Sea  $f(t)$  el tren de pulsos de ancho  $p$  y periodo  $T$ .



## La FFT y la Serie de Fourier

La versión muestreada  $f(k)$  de  $f(t)$  sólo puede tomar un número finito de puntos. Tomemos por ejemplo  $N=32$  puntos cuidando que cubran el intervalo de 0 a  $T$  (con  $p=1$ ,  $T=2$ ):



## La FFT y la Serie de Fourier

Para obtener estas 32 muestras usando Matlab se puede hacer lo siguiente:

```
k=0:31  
f=[(k<8) | (k>23)]  
Plot(k,f,'o')
```

## La FFT y la Serie de Fourier

Con los 32 puntos  $f(k)$  calculamos  $F(n)$  mediante la FFT, por ejemplo, en Matlab:

$$F = \text{fft}(f) / N;$$

Con lo que obtenemos 32 valores complejos de  $F(n)$ . Estos valores son los coeficientes de la serie compleja ordenados como sigue:

<b>n</b>	1	2	3	4	...	16	17	18	19	...	32
<b>F(n)</b>	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	...	$c_{15}$	$c_{-16}$	$c_{-15}$	$c_{-14}$	...	$c_{-1}$

## La FFT y la Serie de Fourier

Podemos graficar el espectro de amplitud reordenando previamente  $F(n)$  como sigue

$$\text{aux} = F;$$

$$F(1:16) = \text{aux}(17:32);$$

$$F(17:32) = \text{aux}(1:16);$$

$F(n)$  queda:

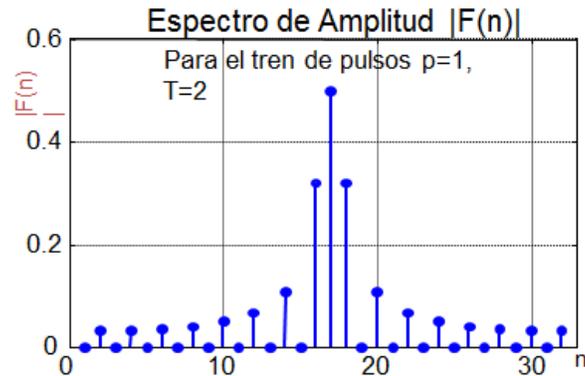
<b>n</b>	1	...	13	14	15	16	17	18	19	...	32
<b>F(n)</b>	$c_{-16}$	...	$c_{-3}$	$c_{-2}$	$c_{-1}$	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	...	$c_{15}$

Y para graficar el espectro de amplitud:

$$\text{stem}(\text{abs}(F))$$

Obteniéndose:

## La FFT y la Serie de Fourier



Si deseamos una escala horizontal en unidades de frecuencia (rad/seg):

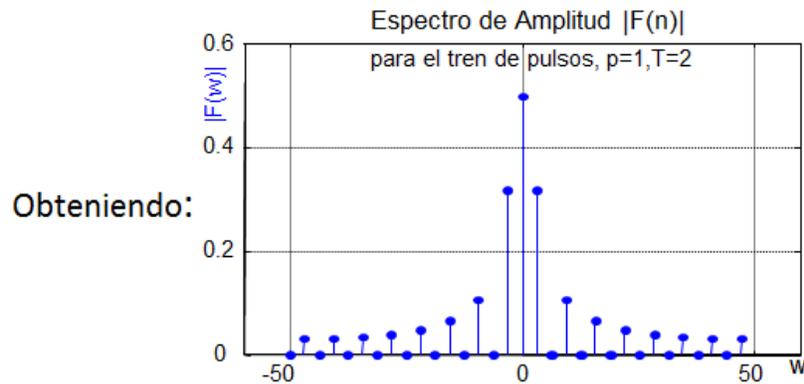
## La FFT y la Serie de Fourier

$$w_0 = 2 * \pi / T;$$

$$n = -16 : 15;$$

$$w = n * w_0;$$

**Stem (w, abs (F) )**



## La FFT y la Serie de Fourier

También podemos obtener los coeficientes de la forma trigonométrica, recordando que:

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

Podemos obtener

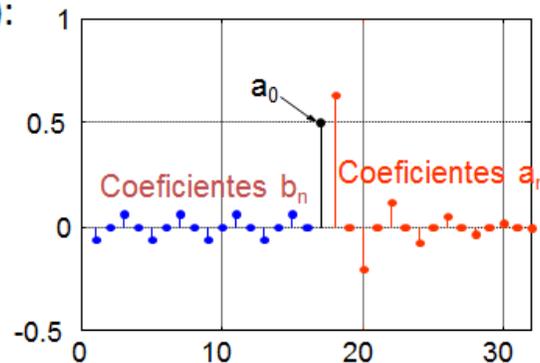
$$a_0 = c_0, \quad a_n = 2 \operatorname{Re}(c_n), \quad b_n = -2 \operatorname{Im}(c_n)$$

Para el ejemplo se obtiene:  $a_0=0.5$ ,  $a_n=b_n=0$  (para  $n$  par), además para  $n$  impar:

n	1	3	5	7	9	11	13	15
$a_n$	0.6346	-0.2060	0.1169	-0.0762	0.0513	-0.0334	0.0190	-0.0062
$b_n$	-0.0625	0.0625	-0.0625	0.0625	-0.0625	0.0625	-0.0625	0.0625

## La FFT y la Serie de Fourier

Como el tren de pulsos es una función par, se esperaba que  $b_n=0$ ; (el resultado obtenido es erróneo para  $b_n$ , pero el error disminuye para  $N$  grande):



## La FFT y la Serie de Fourier

**ACTIVIDA 11:** Usar el siguiente código para generar 128 puntos de una función periódica con frecuencia fundamental  $\omega_0=120\pi$  (60 hertz) y dos armónicos impares en el intervalo  $[0,T]$ :

```
N=128;  
w0=120*pi;  
T=1/60;  
t=0:T/(N-1):T;  
f=sin(w0*t)+0.2*sin(3*w0*t)+0.1*sin(11*w0*t);
```

Usando una función periódica diferente a la subrayada:

- Graficar la función.
- Obtener y graficar el espectro de amplitud de la señal usando la función FFT

## Medidores Digitales

La FFT ha hecho posible el desarrollo de equipo electrónico digital con la capacidad de cálculo de espectros de frecuencia para señales del mundo real, por ejemplo:

- Osciloscopio digital Fuke 123 (\$ 18,600.00 M.N.)
- Osc. digital Tektronix THS720P (\$3,796 dls)
- Power Platform PP-4300

## Medidores Digitales

### El Fluke 123 scope meter



## Medidores Digitales

### Tektronix THS720P (osciloscopio digital)



## Medidores Digitales

### Analizador de potencia PP-4300

Es un equipo especializado en monitoreo de la calidad de la energía: permite medición de 4 señales simultáneas (para sistemas trifásicos)



## Aplicaciones de Fourier

¿Cómo y dónde se aplican las series de Fourier?

### INTRODUCCION

Muchas ecuaciones de las ciencias se formulan con derivadas parciales y se resuelven, en ocasiones, descomponiendo la incógnita en series (sumas infinitas). Las series más interesantes son las de potencias y por supuesto las de Fourier. Dado el carácter periódico de tales sumas, las series de Fourier se aplican, por ejemplo, donde surgen procesos oscilantes, como ocurre en las series temporales de naturaleza económica, en electrónica (se aplican por ejemplo en teoría de señales), en acústica o en óptica. Los problemas teóricos relacionados con la convergencia de las series de Fourier han impulsado avances fundamentales en distintos ámbitos de las matemáticas y siguen siendo considerados hoy como problemas muy difíciles.

## APLICACIÓN EN PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

Es importante considerar la aplicación de las series de Fourier, ya que estas sirven mucho en el procesamiento digital de señales, la cual es un área de las ciencias e ingeniería que se ha desarrollado rápidamente en los últimos 30 años.

Este rápido desarrollo es resultado de avances tecnológicos tanto en los ordenadores digitales como en la fabricación de circuitos integrados. Estos circuitos digitales baratos y relativamente rápidos han hecho posible construir sistemas digitales altamente sofisticados, capaces de realizar funciones y tareas del procesamiento de señales que convencionalmente se realizaban analógicamente, se realicen hoy mediante hardware digital, más barato y a menudo más fiable. Es relevante diferenciar entre una señal analógica y digital para comprender mejor el procesamiento de señales, el nombre de una señal analógica se deriva del hecho de que es una señal análoga a la señal física que se representa. La magnitud de una señal analógica puede tomar cualquier valor, esto es, la amplitud de una señal analógica exhibe una variación continua sobre su campo de actividad. La gran mayoría de señales en el mundo que hay a nuestro alrededor son analógicas. Los circuitos que procesan estas señales se conocen como circuitos analógicos. Una forma alternativa de representación de señal es la de una secuencia de números, cada uno de los cuales representa la magnitud de señal en un instante determinado. La señal resultante se llama señal digital, está a diferencia de la señal analógica es una señal que está discretizada en el tiempo y cuantificada en magnitud. El procesamiento de señales se correlaciona con las series de Fourier ya que esta nos permite expresar una función periódica de tiempo como la suma de un número infinito de senoides cuyas frecuencias están armónicamente relacionadas. La importancia de esto radica en que la serie de Fourier nos facilita el arduo trabajo del manejo con señales, ya que para que nosotros podamos procesar estas señales es necesario expresarlas como una combinación lineal de términos, lo cual nos lo proporciona la serie de Fourier.

## APLICACIONES EN LA MEDICINA

Diagnóstico automático: La ecografía permite registrar la vibración de cada una de las membranas del corazón, proporcionando una curva periódica. Un programa de ordenador calcula los primeros términos de las sucesiones (coeficientes de Fourier). En el caso de la válvula mitral, son suficientes los dos primeros coeficientes de Fourier para diagnosticar al paciente. Esta forma de diagnóstico disminuye costes en el sistema sanitario y, sobre todo, evita al paciente los riesgos y molestias inherentes a las pruebas endoscópicas

## APLICACIONES DIVERSAS

Las series de Fourier son de gran importancia ya que tienen muchas aplicaciones dentro de los campos de la física y de la matemática entre otros. La idea básica de las series de Fourier es que toda función periódica de periodo  $T$  puede ser expresada como una suma trigonométrica de senos y cosenos del mismo periodo  $T$ . Este problema aparece por ejemplo en astronomía en donde Neugebauer (1952) descubrió que los Babilonios utilizaron una forma primitiva de las series de Fourier en la predicción de ciertos eventos celestiales.

La historia moderna de las series de Fourier comenzó con D'Alembert (1747) y su trabajo de las oscilaciones de las cuerdas de violín. El desplazamiento de una cuerda de violín como una función del tiempo y de la posición es solución de una ecuación diferencial.

La solución de este problema es la superposición de dos ondas viajando en direcciones opuestas a la velocidad como lo expresa la fórmula de D'Alembert En la cual la función es impar de periodo  $2$  que se anula en algunos puntos específicos. Euler en 1748 propuso que tal solución podía ser expresada en una serie en función de senos y como consecuencia una serie con producto de senos

y cosenos, Las mismas ideas fueron luego expuestas por D.Bernoulli (1753) y Lagrange (1759). La fórmula para calcular los coeficientes apareció por primera vez en un artículo escrito por Euler en 1777.

La contribución de Fourier comenzó en 1807 con sus estudios del problema del flujo del calor presentado a la academia de ciencias en 1811 y publicado en parte como la célebre teoría analítica del calor en 1822. Fourier hizo un intento serio por demostrar que cualquier función diferenciable puede ser expandida en una serie trigonométrica. Una prueba satisfactoria de este hecho fue dada por Dirichlet en 1829.

Modernamente el análisis de Fourier ha sido impulsado por matemáticos como Lebesgue, Hardy, Littlewood, Wiener, Frobenius, Selberg, Weily Weyl entre otros.

El poder extraordinario y la flexibilidad de las series de Fourier se ponen de manifiesto en la asombrosa variedad de aplicaciones que estas tienen en diversas ramas de la matemática y de la física matemática desde la teoría de números y geometría hasta la mecánica cuántica.

Algunas de las más importantes aplicaciones de las series de Fourier son:

- El problema isoperimétrico
- Temperatura de la tierra
- Evaluación de series no triviales
- La desigualdad de Wirtinger
- Solución de ecuaciones diferenciales
- Flujo del calor
- Ecuación de ondas
- Formula de Poisson
- Identidad de Jacobi

Veamos de forma breve algunas de estas de estas aplicaciones:

- El problema isoperimétrico que es de carácter matemático afirma que si  $C$  es una curva cerrada simple con un tipo de clase y de longitud unitaria, entonces el área  $A$  encerrada por la curva satisface cierta desigualdad. La desigualdad se satisface si y solos si  $C$  es una circunferencia. En consecuencia entre todas las curvas cerradas simples de longitud unitaria la que encierra mayor área es la circunferencia.
- Un problema sencillo pero muy interesante es el de calcular la temperatura de la tierra a una profundidad  $x$  a partir de la temperatura de la superficie. Describamos la temperatura de la superficie terrestre como una función  $f$  periódica en el tiempo  $t$  y de periodo 1(un año). La temperatura y la

profundidad en un tiempo y longitud respectivamente, mayores o iguales a cero son también periódicas. Bajo estas circunstancias la temperatura puede ser expandida mediante una serie de Fourier para cada valor  $x$  fijo.

- Otra de las aplicaciones de la serie de Fourier es la evaluación de las series no triviales mediante la identidad de Plancherel para calcular algunas sumas infinitas.
- La desigualdad de Wirtinger es una aplicación de tipo matemática de las series de Fourier para una función continua definida en un intervalo cerrado.
- Tal vez una de las propiedades más importantes de las series de Fourier y en particular de las integrales de Fourier se presenta en la solución de ecuaciones diferenciales ya que transforma operadores diferenciales con coeficientes constantes en multiplicación por polinomios.
- Otra de las aplicaciones importantes de la serie de Fourier y en este caso de la transformada de Fourier es el problema del flujo del calor. el planteamiento de este problema es similar al del problema anterior.
- Las aplicaciones tanto en la ecuación de ondas, la fórmula de Poisson y la Identidad de Jacobi son de carácter matemático riguroso por lo que se dejan indicadas.

## Teorema de transplatación para las series de Fourier-Bessel

La presente aplicación es de tipo matemática utilizando una sucesión de ceros positivos de la función de Bessel de cierto tipo de orden, en este punto una sucesión de funciones forman un sistema ortonormal completo. Las series de Fourier asociadas a este sistema ortonormal se denominan series de Fourier-Bessel dentro de este estudio cabe mencionar el teorema de trasplatación con pesos potenciales para este tipo de series de Fourier que permite un rango lo más alto posible para los parámetros involucrados.

## 1. Resolución de EDPs

### 1.1. La ecuación de ondas

En este apartado vamos a usar las series de Fourier para resolver la ecuación de ondas unidimensional

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x, t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, t),$$

con las condiciones de contorno

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad (1.1)$$

y las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial}{\partial t}u(x, 0) = g(x). \quad (1.2)$$

Esta ecuación, conocida como ecuación de ondas, modeliza el movimiento de una onda unidimensional (por ejemplo el sonido).

Usualmente para resolver este problema se usa el método de separación de variables:

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad X(x) \neq 0, \quad T(t) \neq 0,$$

que al sustituir en la ecuación original nos da

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t), \quad \Rightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda,$$

donde  $\lambda \in \mathbb{R}$ , i.e., tenemos las ecuaciones<sup>1</sup>

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(\pi) = 0, \quad (1.3)$$

y

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0 \quad (1.4)$$

Por sencillez asumiremos  $a = 1$ .

La solución general de (1.3) depende del valor de  $\lambda$ . Es fácil comprobar que solamente se tienen soluciones no nulas si  $\lambda > 0$ . En este caso la solución general es

$$X(x) = \alpha \cos \sqrt{\lambda}x + \beta \sin \sqrt{\lambda}x,$$

que junto a las condiciones de contorno para  $X$  nos dan las soluciones

$$X_n(x) = \sin nx, \quad \lambda := \lambda_n = n^2.$$

En este caso para  $T$  obtenemos ( $a = 1$ )

$$T''(t) + n^2T(t) = 0,$$

luego

$$T_n(t) = A_n \cos nt + B_n \sin nt,$$

y por tanto una solución de nuestra ecuación con las condiciones de contorno (1.1) será

$$u_n(x, t) = (A_n \cos nt + B_n \sin nt) \sin nx.$$

Como la ecuación de ondas es lineal y homogénea entonces su solución general será de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt) \sin nx. \quad (1.5)$$

Para encontrar los coeficientes indeterminados  $A_n$  y  $B_n$  supondremos que  $f$  y  $g$  son lo suficientemente buenas (por ejemplo casi-continuamente derivables en  $[0, \pi]$ ) y vamos a extenderlas a todo el intervalo  $[-\pi, \pi]$  de forma impar, es decir de forma que  $f$  y  $g$  sean funciones impares. Entonces podemos desarrollar en serie de Fourier ambas funciones y además las correspondientes series son absoluta y uniformemente convergentes. Si ahora usamos las las condiciones iniciales (1.2) obtenemos<sup>2</sup>

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n B_n \operatorname{sen} nx,$$

donde

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx, \quad B_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} g(x) \operatorname{sen} nx \, dx. \quad (1.6)$$

Veamos un ejemplo. Supongamos que el perfil inicial de una cuerda viene dado por la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{Ax}{a} & 0 \leq x \leq a \\ \frac{A(\pi - x)}{\pi - a} & a \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

y que inicialmente está en reposo, es decir,  $g(x) = 0$ . Entonces usando (1.6) tenemos  $B_n = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx = \frac{2A \operatorname{sen} an}{an^2(\pi - a)},$$

así que la solución es

$$u(x, t) = \frac{2A}{a(\pi - a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} an}{n^2} \cos nt \operatorname{sen} nx.$$

Supongamos ahora que el perfil inicial de una cuerda viene dado por la función

$$f(x) = \alpha x(\pi - x)$$

y que inicialmente está en reposo, es decir,  $g(x) = 0$ . Entonces usando (1.6) tenemos  $B_n = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx = \frac{4\alpha(1 + (-1)^{n+1})}{n^3\pi},$$

y por tanto la solución es

$$u(x, t) = \frac{8\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \cos(2n-1)nt \operatorname{sen}(2n-1)x.$$

Como ejercicio considerar el caso cuando

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \\ \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}, \\ \pi - x & \frac{3\pi}{4} \leq x \leq \pi. \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = 0.$$

y el caso cuando  $f(x) = 0$ ,

$$g(x) = \begin{cases} \frac{v_0 x}{a} & 0 \leq x \leq a \\ \frac{v_0(\pi - x)}{\pi - a} & a \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

## 1.2. La ecuación del calor

Consideremos ahora la ecuación del calor

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t),$$

con las condiciones de contorno

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad (1.7)$$

y la condición inicial

$$u(x, 0) = f(x). \quad (1.8)$$

Nuevamente usaremos el método de separación de variables:

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad X(x) \neq 0, \quad T(t) \neq 0,$$

que al sustituir en la ecuación original nos da

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t), \quad \Rightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda,$$

donde  $\lambda \in \mathbb{R}$ , i.e., tenemos las ecuaciones

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(\pi) = 0, \quad (1.9)$$

y

$$T'(t) - a^2 \lambda T(t) = 0 \quad (1.10)$$

La solución general de (1.9) depende del valor de  $\lambda$ . Es fácil comprobar que solamente se tienen soluciones no nulas si  $\lambda > 0$ . En este caso la solución general es

$$X(x) = \alpha \cos \sqrt{\lambda}x + \beta \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}x,$$

que junto a las condiciones de contorno para  $X$  nos dan las soluciones

$$X_n(x) = \operatorname{sen} nx, \quad \lambda := \lambda_n = n^2.$$

En este caso para  $T$  obtenemos

$$T'(t) + a^2 n^2 T(t) = 0,$$

luego

$$T_n(t) = e^{-a^2 n^2 t}$$

y por tanto una solución de nuestra ecuación con las condiciones de contorno (1.7) será

$$u_n(x, t) = A_n e^{-a^2 n^2 t} \operatorname{sen} nx.$$

Como la ecuación del calor es lineal y homogénea entonces su solución general será de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-a^2 n^2 t} \operatorname{sen} nx. \quad (1.11)$$

Para encontrar los coeficientes indeterminados  $A_n$  supondremos que  $f$  es lo suficientemente buena (por ejemplo casi-continuamente derivable en  $[0, \pi]$ ) y vamos a extenderlas a todo el intervalo  $[-\pi, \pi]$  de forma impar, es decir de forma que  $f$  y  $g$  sean funciones impares. Entonces desarrollamos en serie de Fourier  $f$  y usamos las las condiciones iniciales (1.8) obtenemos

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} nx,$$

donde

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx. \quad (1.12)$$

Veamos un ejemplo. Supongamos que la distribución inicial de la temperatura es uniforme, i.e.,  $f(x) = T_0$ . Entonces, usando (1.12) tenemos  $B_n = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx = \frac{2T_0(1 + (-1)^{n+1})}{\pi n},$$

así que la solución es

$$u(x, t) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} e^{-a^2(2n-1)^2 t} \operatorname{sen}(2n-1)x.$$

### 1.3. El problema del telégrafo

La ecuación

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + u(x, t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t),$$

con las condiciones de contorno

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad (1.13)$$

y las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = 0, \quad (1.14)$$

que modeliza la transmisión telegráfica.

Para resolverlo usaremos el método de separación de variables:

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad X(x) \neq 0, \quad T(t) \neq 0,$$

que al sustituir en la ecuación original nos da

$$\begin{aligned} X(x)T''(t) + X(x)T'(t) + X(x)T(t) &= a^2 X''(x)T(t), \quad \Rightarrow \\ a^2 \frac{X''(x)}{X(x)} &= \frac{T''(t)}{T(t)} + \frac{T'(t)}{T(t)} + 1 = -\lambda, \end{aligned}$$

donde  $\lambda \in \mathbb{R}$ , i.e., tenemos las ecuaciones

$$X''(x) + \lambda a^{-2} X(x) = 0, \quad X(0) = X(\pi) = 0, \quad (1.15)$$

y

$$T''(t) + T'(t) + T(t) - a^2 \lambda T(t) = 0 \quad (1.16)$$

La solución general de (1.15) depende del valor de  $\lambda$ . Es fácil comprobar que solamente se tienen soluciones no nulas si  $\lambda > 0$ . En este caso la solución general es

$$X(x) = \alpha \cos \sqrt{\lambda} x + \beta \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} x,$$

que junto a las condiciones de contorno para  $X$  nos dan las soluciones

$$X_n(x) = \text{sen } nx, \quad \lambda := \lambda_n = n^2.$$

En este caso para  $T$  obtenemos

$$T''(t) + T'(t) + (1 - a^2 n^2)T(t) = 0,$$

luego

$$T_n(t) = A_n e^{-\frac{1}{2}t} e^{-\omega_n t} + B_n e^{-\frac{1}{2}t} e^{\omega_n t}, \quad \omega_n = \sqrt{4a^2 n^2 - 3},$$

o, equivalentemente,

$$T_n(t) = e^{-\frac{1}{2}t} (A_n \cosh(\omega_n t) + B_n \sinh(\omega_n t))$$

y por tanto su solución general será de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t} (A_n \cosh(\omega_n t) + B_n \sinh(\omega_n t)) \text{sen } nx, \quad \omega_n = \sqrt{4a^2 n^2 - 3}. \quad (1.17)$$

Nuevamente para encontrar los coeficientes indeterminados  $A_n$  y  $B_n$  usamos las condiciones iniciales que en este caso nos dan

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen } nx,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{2} A_n + B_n \omega_n \right) \text{sen } nx,$$

donde

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \text{sen } nx \, dx, \quad B_n = \frac{A_n}{2\omega_n} = \frac{A_n}{\pi\omega_n} \int_0^{\pi} f(x) \text{sen } nx \, dx. \quad (1.18)$$

Veamos un ejemplo. Supongamos que  $f(x) = \alpha x(\pi - x)$ , entonces como ya hemos visto

$$A_{2n-1} = \frac{8\alpha}{\pi(2n-1)^3}, \quad A_{2n} = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

por tanto

$$B_{2n-1} = \frac{8\alpha}{\pi(2n-1)^3 \sqrt{4a^2(2n-1)^2 - 3}}, \quad B_{2n} = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

luego la solución es

$$u(x, t) = 8\alpha \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t} \left( \frac{\cosh(\omega_n t)}{\pi(2n-1)^3} + \frac{\sinh(\omega_n t)}{\pi(2n-1)^3 \omega_n} \right) \text{sen}(2n-1)x,$$

con  $\omega_n = \sqrt{4a^2 n^2 - 3}$ .

$$\text{Como ejercicio encontrar la solución si } f(x) = \begin{cases} \alpha x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \alpha(\pi - x), & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$